

BG/BRG WIESELBURG

ERLAUF PROMENADE 1

3250 WIESELBURG

Veranschaulichung der Schrödinger-Gleichung und wichtige Auswirkungen

Autor:

Matthias Baumschlager

8B

Betreuer:

DI Dr. Wilhelm Moser



Bundesgymnasium & Bundesrealgymnasium

WIESELBURG

8. Februar 2019

Abstract

In the course of this scientific paper, the *Schrödinger-equation* and its quantum mechanical principals should be explained in an understandable way. To achieve this aim, at first, the effects of quantum mechanics are being discussed before describing the *Schrödinger-equation* itself in more detail. These explanations are focused on a qualitative perspective instead of on the mathematical details. Nevertheless, none of the important equations and formulas will be skipped. One part of this thesis is focused on the scientist who is responsible for this important discovery, Erwin Schrödinger. In the last chapter, there is an overview of the basic effects of the *Schrödinger-equation* and how the understanding of our world would be different, without this important scientific achievement.

Abstract

Im Zuge dieser vorwissenschaftlichen Arbeit soll die *Schrödinger-Gleichung* und deren quantenmechanische Grundprinzipien anschaulich und verständlich erklärt werden. Um dies zu erreichen werden vorab wichtige Effekte der Quantenmechanik diskutiert bevor das Spezialfeld der *Schrödinger-Gleichung* veranschaulicht wird. Die Erklärungen sind weniger einer mathematischen sondern mehr einer qualitativen Natur. Somit werden zwar die wichtigsten Gleichungen und Formeln thematisiert, aber trotzdem nur begrenzt verwendet. Ein Teil der Arbeit ist dem Wissenschaftler hinter dieser Gleichung, Erwin Schrödinger, gewidmet. Im letzten Kapitel wird ein Überblick über die einfachsten Auswirkungen der *Schrödinger-Gleichung* gegeben und wie unser Verständnis über die Welt ohne diese wissenschaftliche Errungenschaft aussehen würde.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Zielsetzung und Vorgehensweise	2
1 Einführung in die Quantenmechanik	3
1.1 Abschied vom Determinismus	3
1.2 Heisenberg'sche Unschärferelation	4
1.3 Welle-Teilchen Dualismus	7
1.3.1 Fotoelektrischer Effekt	7
1.3.2 Teilcheninterferenz am Doppelspalt	9
1.3.3 Schlussfolgerungen zum heutigen Modell	11
2 Erwin Schrödinger	12
2.1 Leben des Physikers	12
2.2 Philosophische Einstellung	14
2.3 Einfluss von anderen Wissenschaftlern und Freunden	16
3 Die Schrödinger-Gleichung	20
3.1 Plausibilisierung	20
3.2 Mathematische und physikalische Aspekte	24
3.3 Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf	25
4 Auswirkungen auf die Wissenschaft	29
4.1 Physik	29
4.2 Eine Welt ohne Schrödingers Katze	32
Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	34
Literaturverzeichnis	35

Einleitung

Licht.

Dass eine Kerze Licht aussendet, wenn wir sie anzünden, ist für die Menschen schon lange selbstverständlich. In den Augen unserer überraschten Kinder können wir aber trotzdem feststellen: Das war nicht immer so. Die Quantenmechanik entstand genau dadurch, dass es uns nicht möglich war das Phänomen "Licht" zu erklären. Benannt nach dem lateinischen Begriff "Quantum", übersetzt "wie groß, wie viel", beschäftigte sich die Quantenmechanik anfangs nur mit dem Licht und seinen Eigenschaften. Phänomene wie der fotoelektrische Effekt konnten plötzlich durch die Vorstellung von Licht als Teilchen erklärt werden. Man forschte immer weiter bis man zu der Frage gelangte, ob und wo überhaupt die Grenze zwischen Teilchen und Wellen zu ziehen sei. Unter diesen "Quantenphysikern" befand sich auch der Österreicher: Erwin Rudolf Schrödinger. Nach längerer Forschung gelang es ihm 1925 eine Gleichung aufzustellen, die unsere Ansicht von Teilchen und Wellen auf den Kopf stellte: Die Schrödinger-Gleichung.

Im Rahmen dieser Arbeit werden quantenmechanische Prinzipien wie Superposition, die Heisenberg'sche Unschärferelation und andere wichtige Phänomene diskutiert. Ein Kapitel wird dem Wissenschaftler Erwin Schrödinger und seinem Leben gewidmet. Anhand verständlicher Erläuterungen wird die Herleitung der eindimensionalen, zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung erklärt und weitere Formen der Gleichung vorgestellt. Weiters werden einfache Problemstellungen wie die Frage nach der Wellenfunktion eines Teilchens in einem unendlich tiefen Potentialtopf mithilfe dieser Gleichung anschaulich gelöst. Abschließend werden die Auswirkungen dieser quantenmechanischen Errungenschaft auf die Gebiete Physik sowie auf unser alltägliches Leben diskutiert und zusammengefasst.

Zielsetzung und Vorgehensweise

Ziel dieser vorwissenschaftlichen Arbeit ist es, die Schrödinger-Gleichung verständlich zu erklären. Dabei werden zuallererst die dafür notwendigen quantenmechanischen Grundannahmen behandelt. Durch die kurze Biographie Schrödingers wird ein zeitlicher Rahmen geschaffen und dargelegt, warum diese Entdeckung unabdingbar für das Fortschreiten der Quantenmechanik war. Um in einem sinnvollen inhaltlichen Rahmen zu verbleiben, werden nicht alle Formen der Schrödinger-Gleichung erwähnt und besprochen. Stattdessen wird mehr auf die Folgen und Entwicklungen eingegangen, welche durch diese Erkenntnisse ausgelöst wurden.

Diese Arbeit ist rein auf der Wiederverwendung bereits bekannten Wissens aufgebaut.

Kapitel 1

Einführung in die Quantenmechanik

Um den Einstieg in diese doch sehr komplexe Materie zu erleichtern, werden im folgenden Kapitel die wichtigsten Prinzipien der Quantenmechanik erläutert und erklärt.

1.1 Abschied vom Determinismus

Im Jahre 1927 fand in der belgischen Hauptstadt Brüssel eine der wichtigsten Konferenzen in der Geschichte der Quantenmechanik statt. Sie trug den Namen "Solvay-Konferenz über Elektronen und Photonen". Viele wichtige Wissenschaftler dieser Zeit waren anwesend: Erwin Schrödinger, Albert Einstein oder Niels Bohr sind nur einige prominente Beispiele. Aus folgenden Gründen waren sie wohl die bedeutendsten Teilnehmer.

Schrödinger hatte zu dieser Zeit gerade sein wichtigstes Werk zum Wellenverhalten von Teilchen veröffentlicht: die Schrödinger-Gleichung. Einstein war einer der wichtigsten und größten Gegner der Quantenmechanik. Sein Leitsatz "Gott würfeln nicht" war für ihn unmöglich zu umgehen, so wich er bis zu seinem Tod nicht von dieser Meinung ab. Das folgende Zitat aus einem Briefwechsel zwischen ihm und Niels Bohr gibt diesen Umstand sehr gut wieder:

"Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfeln." [Einstein, 1972, S. 97f.]

Bohr war meistens Einsteins Gegner in hitzigen Diskussionen und konnte die Quantenmechanik und ihre radikalen neuen Konzepte wieder und wieder gegen den Schweizer behaupten.

Aber Einstein lag falsch und es wurde bewiesen, dass der Zufall in der Welt der Teilchen und Quanten doch eine viel größere Rolle spielt, als vermutet wurde.

Zu Zeiten Schrödingers wurde auch die Erkenntnis gewonnen, dass bei ein und derselben Ortsmessung mehrere verschiedene Ergebnisse auftreten können. Dies bedeutete ein großes Umdenken innerhalb der Physik und rief große und hitzige Diskussionen auf den Plan. Bis zum ersten allgemein anerkannten Beweis, welcher beide Theorien, die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein und die neu entstandene Quantentheorie, als richtig bewies, war kaum ein Ende der Disparitäten zu erkennen.

Doch je genauer man die Quantenmechanik unter die Lupe nimmt, je genauer man deren Ursachen zu ergründen versucht, desto mehr muss man der Tatsache ins Auge blicken, dass viele Phänomene nur durch absoluten Zufall erklärbar sind. Größen wie Energie, Ort oder Impuls, existieren in der mikroskopisch kleinen Welt der Teilchen nur mehr als Wahrscheinlichkeiten, Durchschnitts- oder Erwartungswerte. Somit sind wir gezwungen unser Verständnis für das Universum und dessen Teile ein weiteres Mal zu überdenken.

1.2 Heisenberg'sche Unschärferelation

Die Entdeckung dieser Naturgegebenheit war wohl eine der wichtigsten der ganzen "Quantenrevolution": die Heisenberg'sche Unschärferelation besagt, dass, wenn man sie auf das Wesentlichste reduziert, wir bei jeder Messung einen gewissen "natürlichen" Messfehler machen. Dieser ist aber keineswegs die Schuld von ungenauen Wissenschaftlern und Messgeräten, sondern liegt in der Natur der Messung selbst, wie im Folgenden noch näher erklärt wird.

Stellt man diese natürliche Ungenauigkeit mathematisch dar, so ergibt sich folgende Gleichung: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ [Kuchling, 2014]

Zur Erklärung:

Δx (gesprochen: Delta-x) gibt die "Ortsunschärfe" an.

Δp (gesprochen: Delta-p) gibt die "Impulsunschärfe" an.

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (gesprochen: h-quer) ist das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum.

Folgende wichtige Anmerkung ist an dieser Stelle zu treffen: diese Unschärfe bezüglich Ort und Impuls tritt auch in der makroskopischen Welt auf, jedoch ist dieser Effekt vernachlässigbar klein, wenn man ihn auf "Alltagskörper" bezieht. Man stößt somit bei jeder Messung irgendwann auf eine "minimale" Ungenauigkeit, eine unüberwindbare Eigenschaft der Messung selbst. Diese Erkenntnis zerstörte das bis dahin gültige Modell, dass wir Experimente immer genauer durchführen könnten, bis keine Messfehler mehr produziert würden.

Beispielsweise ist die Bremskraft, die ein Ultraschallsensor auf einen sich bewegenden Körper auswirkt, verschwindend gering. Überträgt man dieses Prinzip aber nun in den Mikrokosmos, wird das Ganze doch etwas komplizierter. Um die Position eines Elektrons in einem absolut dunklen Raum zu bestimmen, muss mindestens ein Photon an besagtem Elektron gestreut werden.

Wenn man Objekte in der Größenordnung von Elektronen und anderen Elementarteilchen messen will, so ist auch die Ablenkung durch ein einziges Photon bereits verheerend für die Genauigkeit der Messung. Aufgrund des Teilchen-Welle-Dualismus muss, um eine genaue Ortsmessung zu ermöglichen, ein Photon mit einer möglichst geringen Wellenlänge verwendet werden.

Je kleiner die Wellenlänge, desto größer die Energie des Photons, desto ungewisser ist der Impuls des Elektrons nach dem Zusammenstoß der Teilchen. Es ist also ein Teufelskreis, je genauer man die eine Größe bestimmt, desto ungenauer wird die andere und umgekehrt.

Somit kommt man zu der Einsicht, dass beide Größen, Ort und Impuls nur bis zu einem gewissen Wert beide gleichzeitig bestimmt werden können. Dieser Wert ist das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum und wie in der Gleichung gut ersichtlich ist, steigt bei einer genaueren Messung an einem Parameter die Ungenauigkeit des anderen. An dieser Stelle ist noch klarzustellen, dass das Planck'sche Wirkungsquantum einen "Mindestwert" an Ungenauigkeit wiedergibt. Ungenauer als das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum ist in der Praxis jede Messung, jedoch egal wie gut System und Messgeräte optimiert werden, der Wert der Ungenauigkeit kann nie unter den Wert von \hbar fallen.

Diese Eigenschaft der Messung selbst kommt nicht nur bei Ort und Impuls vor, auch Größen wie Energie und Zeit sind bei gleichzeitigen Messungen komplementär, wie der Fachbegriff lautet. Zur Veranschaulichung, warum diese Eigenschaft von Messungen "erst" in der Quantenmechanik relevant ist, wird im folgenden Abschnitt ein Beispiel aus der makroskopischen Welt vorgestellt. Wichtige Daten zu dem Beispiel sind:

- Sachverhalt: Gleichzeitige Zeit- und Energiemessung an einem sich bewegenden Objekt
- Zeitungenauigkeit beruht auf Daten einer Cäsium-Atomuhr

$$\Delta t = 10^{-15} s$$

$$\hbar = 1,054571800 \cdot 10^{-34} Js$$

$$\text{aus} \quad \Delta E \cdot \Delta t \sim \frac{\hbar}{2}$$

$$\text{folgt :} \quad \Delta E \geq 4,8 \cdot 10^{-20} J$$

Zum Vergleich: beim Erwärmen von Wasser von 20 auf 100 °C wird eine Energie von zirka $335 kJ$ benötigt, das sind $3,35 \cdot 10^6 J$. Das ist ein Unterschied von knapp 26 Kommastellen! Wie deutlich zu erkennen ist, spielt also die Unschärfe von Messgrößen in der makroskopischen Welt keine Rolle und kann eindeutig vernachlässigt werden. Sonstige Messeinflüsse wie ungenaue Messapparate und unzulänglicher Experimentaufbau sind in der Alltagswelt ein viel größeres Problem als die Unschärferelation.

1.3 Welle-Teilchen Dualismus

Zur Erklärung des Zwiespaltes zwischen Wellen- und Teilchenansicht in der Physik werden die Experimente zum fotoelektrischen Effekt und dem Doppelspalt erläutert, welche beide auf völlig gegensätzliche Eigenschaften von Quanten beruhen und lange Zeit als unvereinbar mit den Modellen der Quantenmechanik galten.

1.3.1 Fotoelektrischer Effekt

Der fotoelektrische Effekt liefert einen wichtigen Beitrag zu unserer modernen Stromerzeugung und ermöglicht uns alternative Energien wie die der Sonne zu nützen. Wie genau dieser Effekt funktioniert und warum elektromagnetische Wellen und ihre Teilcheneigenschaften dabei eine große Rolle spielen wird im folgenden Kapitel erklärt.

”Bestrahlt man eine Metalloberfläche mit Licht der Frequenz ω (ultraviolett oder auch sichtbares Licht bei Alkalimetallen), so werden Elektronen aus dem Metall emittiert.” [Lüth, 2014, S. 11]

Schon im 19. Jahrhundert wurde dieses Verhalten beim Bestrahlen von Metall mit Licht beobachtet und im Jahre 1905 von Albert Einstein erfolgreich gedeutet. Dieses doch für den damaligen Wissensstand verwunderliche Verhalten von elektromagnetischen Wellen, war nur durch Quantisierung des Lichtes selbst erklärbar. Es musste winzige teilchenartige Quanten innerhalb des Lichtes geben, welche durch elastische Stöße ihre Energie, definiert durch die Gleichung $E = \hbar \cdot \omega$ [Lüth, 2014], auf die Elektronen übertragen. Dadurch entsteht ein elektrischer Strom, genannt Fotostrom.

Erklärung der Abbildung:

Die y-Achse gibt eine qualitative Skala für die verschiedenen Energien an.

$\hbar \cdot \omega$ beschreibt die Energie des eintreffenden Photons mit der Frequenz ω

W beschreibt die benötigte Austrittsarbeit um das Elektron aus dem Metallgitter zu befreien.

E_{el} beschreibt die Energie die das Elektron nach seiner "Befreiung" noch besitzt.

Wie Abbildung 1.1 zeigt, reicht die Energie $\hbar \cdot \omega$ nicht nur aus um das Elektron zu "befreien", sondern es erhält zusätzlich noch die Energie $E_{el} = \hbar \cdot \omega - W$ [Lüth, 2014, S. 13] und kann somit einen elektrischen Strom bewirken. Offensichtlich müssen Licht und Elektron beide Teilchencharakter besitzen um dieses Phänomen begründen zu können.

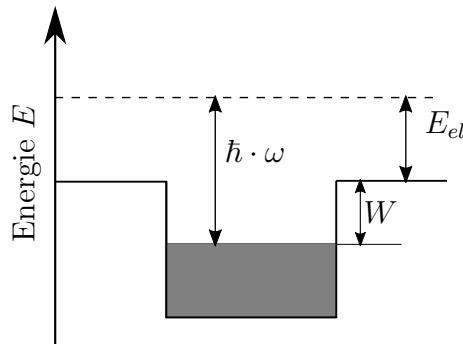


Abbildung 1.1: nach Abb. 2.1e [Lüth, 2014, S. 12]

1.3.2 Teilcheninterferenz am Doppelspalt

”Ein Doppelspaltexperiment für Elektronen wurde schon 1956 von G. Möllenstedt und H. Dücker mittels eines Biprismas [...] aus einem positiv geladenen metallischen Faden zwischen zwei planetaren Elektroden auf Erdpotential [durchgeführt] (Abb. 2.8b).” [Lüth, 2014, S. 22]

Folgende Abbildung stellt diesen verwendeten Versuchsaufbau grafisch dar:

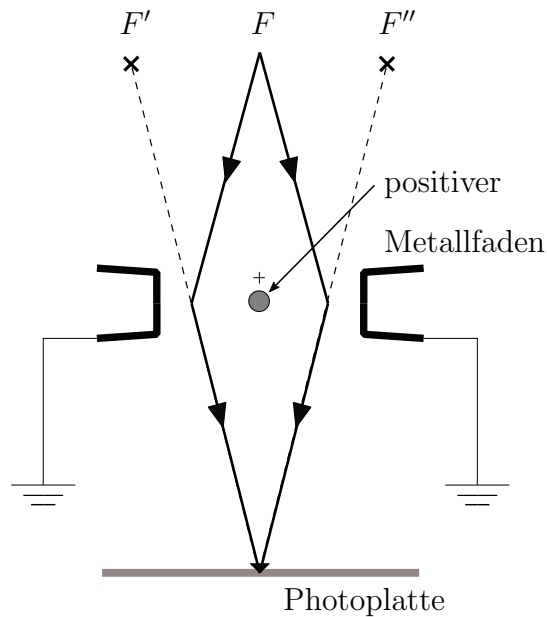


Abbildung 1.2: nach Abb. 2.8b [Lüth, 2014, S. 23]

Dieser Versuchsaufbau funktioniert folgendermaßen: Die Elektronen werden am Punkt F ausgesendet und passieren in unterschiedlichen Abständen zum positiven Metallfaden das Biprisma. Somit entsteht eine Art ”Gitterbrechung”, bei der die Elektronen, egal in welchem Abstand zum Metallfaden, immer gleich stark abgelenkt werden. Dadurch geht die Information von wo die Elektronen kommen und auf welcher Seite sie den Metallfaden passiert haben, verloren und es entsteht ein Interferenzmuster. Die zwei Punkte F' und F'' sollen darstellen, dass die Elektronen von beiden Punkten ausgesendet werden könnten, man aber nie genau sagen kann von welchem.

Wie das Ergebnis dieses und zahlreicher weiterer genauerer, modernerer und ausgefallenerer Doppelspaltexperimente zeigte, ist das Wellenverhalten von Elektronen kein Zufall und liegt in der Natur aller Teilchen.

Bei einem späteren Versuch nach demselben Prinzip konnte sogar bewiesen werden, dass bei genügend großer Anzahl von Elektronen, ein deutlich erkennbares Interferenzmuster am Detektorschirm entsteht, auch wenn die Teilchenquelle so langsam Elektronen emittiert, dass jene zeitlich und örtlich komplett voneinander abgeschlossen sind und nichts voneinander "wissen" können. Obwohl dieses Verhalten sehr verwunderlich ist, beschreibt es das "Herz der Quantenmechanik". Richard P. Feynman war sehr angetan von den Ergebnissen aus den Doppelspaltexperimenten und fasste seine Bewunderung in folgendem kurzen Statement zusammen: "impossible, absolutely impossible to explain in any classical way, and has in it the heart of quantum mechanics" [Lüth, 2014, S. 25].

Er hatte Recht, das Doppelspaltexperiment war zwar eines der größten Rätsel mit dem sich die Physik im 20. Jhdt. auseinandersetzen hatte, aber es rief auch große Revolutionen unseres Weltbilds auf den Plan, welche die moderne Quantenmechanik begründeten. Aber nicht nur das Interferenzmuster war eine erstaunliche Erkenntnis, man fand auch heraus, dass die Ablenkung, welche die Elektronen erfuhren, nicht von ihrem Abstand zum positiv geladenen Draht abhängig ist, sondern allein von ihrer Energie. Eine Eigenschaft die vor diesem Experiment nur bei elektromagnetischen Wellen beobachtet werden konnte.

Wenn man die Elektronen als Einzelobjekt betrachtet, so durchquert jedes Teilchen einen der beiden Spalte und löst eine Reaktion auf dem Detektorschirm aus. Der Auftreffpunkt erscheint bei wenig gemessenen Elektronen zufällig, bis man genügend Elektronen gemessen hat, um einen statistischen Wert darstellen zu können. Natürlich wären im Rahmen des Doppelspaltexperimentes auch die Begriffe "Verschränkung" und die "Welcher Weg?-Frage" zu klären. Dies würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Zusammenfassend kann man aus dem Doppelspaltexperiment den Schluss ziehen, dass zwar einzelne Teilchen in einem gewissen Rahmen als klassische Teilchen angesehen werden können. Erhöht man jedoch die Anzahl der gemessenen Teilchen, so handelt es sich um viele verschiedene Teilchenzustände, die sich überlagern, genannt Superposition. Ein Phänomen der Quantenmechanik, das im Falle des Doppelspaltes dazu führt, dass die Elektronen wie Wellen zu behandeln sind. Somit entsteht wie bei einer Versuchsanordnung mit elektromagnetischen Wellen, ein Interferenzmuster.

1.3.3 Schlussfolgerungen zum heutigen Modell

Wie diese und viele weitere Versuche begründen konnten, sind Wellen und Teilchen unterschiedliche Seiten der selben "Münze". Wo ist hier nun die Grenze zwischen "Wellen" und "Teilchen" zu ziehen? Die Wahrheit ist: Es gibt keine. Alle Teilchen können auch als Wellen behandelt werden und alle Wellen haben auch Teilchencharakter. Dies führte zu der Erkenntnis, dass auch andere "ursprünglich" wellenförmige Strahlungen und Kräfte, wie die starke Wechselwirkung, Teilchen als "Energieüberträger" haben müssen.

Ein wichtiger Punkt dieser "Doppeleigenschaft" ist, dass zwar jegliche Form von Materie und Energie sowohl Teilchen- als auch Wellenform besitzen. Jedoch kann man nie beide gleichzeitig berücksichtigen. Je nach Anwendung wird quasi zwischen Teilchen- und Wellenvorstellung "gewechselt". Diese Lösung des Welle-Teilchen-Problems wird Komplementaritätsprinzip genannt und ist in unserem Bedürfnis an Visualisierungen begründet. Niemand kann tatsächlich herausfinden "was" das Licht ist, wir sammeln Erfahrungen in Experimenten und vergleichen diese mit unseren Modellen.

Wir können uns somit nur eine indirekte Vorstellung von der mikroskopischen Welt machen und möglichst treffende Theorien aufstellen. Niemand wird jemals ein Elektron "live" dabei beobachten können, wie es einen Doppelspalt durchquert, dafür sind wir Menschen schlicht und einfach nicht geeignet, unsere Welt ist die makroskopische.

Kapitel 2

Erwin Schrödinger

Erwin Schrödinger war einer der wohl wichtigsten Physiker des 20. Jahrhunderts und nicht nur ein genialer Physiker, sondern darüber hinaus ein überaus charmanter und bodenständiger Österreicher. Obwohl er vielen leider kein Begriff ist, so bleibt zumindest seinem Namen durch sein Lebenswerk, die Schrödinger-Gleichung, ein ewiges Denkmal geschaffen.

2.1 Leben des Physikers

Er war sein Leben lang begeisterter Physiker und dazu ein ausgezeichnete Mathematiker und Theoretiker. Trotzdem fühlte sich Erwin Schrödinger wie er selbst beschreibt, immer zur Philosophie hingezogen:

”Ich entschied mich, dort [Czernowitz] aufrichtige theoretische Physik zu lesen, zunächst nach dem Vorbild der brillanten Vorlesungen meines verehrten Lehrers Fritz Hasenöhl, der im Krieg gefallen war. Darüberhinaus war es mir ein Anliegen, mich mit der Philosophie zu beschäftigen, tief versunken, wie ich zu der Zeit in die Schriften von Spinoza, Schopenhauer, Mach, Richard Semon und Richard Avenarius war. Doch mein guter Engel fuhr dazwischen, da Czernowitz nicht länger zu uns gehören sollte. So wurde hieraus nichts. Ich musste bei der theoretischen Physik bleiben und zu meinem Erstaunen kam bisweilen sogar etwas dabei heraus.” [Moore, 2012, S. 11]

Im Leben Schrödingers (Geburt: 12. August 1887) war die Physik nie sein einziges Interessengebiet, obwohl er seinen Lehrer Fritz Hasenöhl immer als sehr großes Vorbild

anerkannte und ihm in seinen wissenschaftlichen Leistungen Tribut zollte. Es war die Philosophie und das spirituelle Leben, das es ihm ebenso angetan hatte.

Anders formuliert, es gab vor ihm nur wenige Wissenschaftler, die solche "Grenzgänger" zwischen Naturwissenschaft und Philosophie waren. Wie aus dem Zitat herauszulesen ist, so wusste der junge Schrödinger zuerst gar nicht, ob er die Physik nicht besser an den Nagel hängen und zur Philosophie wechseln sollte. In gewisser Hinsicht war ihm "beides recht" und er nahm es eher gelassen, dass ihm durch den ersten Weltkrieg, die Chance einen philosophischen Lehrstuhl zu bekleiden, verwehrt blieb. Resümierend über seine Taten und Werke kann man darauf schließen, dass er die Philosophie niemals ganz "loslassen" konnte. Ein Indiz dafür war sein Buch "Mein Leben, meine Weltansicht" [Schrödinger, 2016], in dem er nahezu gänzlich auf die sonst in der Wissenschaft übliche argumentierende Schreibweise verzichtet und mit seinem österreichischen Witz seine ganz persönliche Weltanschauung erklärt und über Gott und die Welt philosophiert.

Erwin Schrödinger war Vater einer unehelichen Tochter, welche aus einer seiner vielen Liebschaften hervorging. All diese "Affären" waren Teil der (damals üblichen) offenen Beziehung, die er mit seiner Frau Annemarie Bertel hatte. In seinem Berufsleben war er ein außergewöhnlich engagierter Wissenschaftler und Lektor an den Universitäten Zürich, Berlin und Wien. Der Höhepunkt seiner wissenschaftlichen Karriere war die Zeit nach dem Aufenthalt in Arosa (Ost-Schweiz) im Dezember 1925. Während dieser 12 Monate war er in einem "Rausch" des wissenschaftlichen Arbeitens und war produktiver und effizienter, als jemals zuvor in seinem Leben. Zu dieser Zeit entstand auch die weltbekannte Schrödinger-Gleichung, für welche er im Jahre 1933 den Nobelpreis für Physik erhielt.

Seine wissenschaftlichen Erkenntnisse prägen die Physik bis heute und er zählt zu den insgesamt nur vier Österreichern, denen überhaupt die Ehre eines Physik-Nobelpreises zuteil wurde. Am bekanntesten ist wohl sein Gedankenexperiment zur Veranschaulichung der Superposition, auch genannt "Schrödingers Katze". Dabei beschreibt Schrödinger ein hypothetisches Experiment mit einer Katze, welche sich gemeinsam mit einer tödlichen Dosis Gift und einem Detektor für radioaktive Strahlung, gebunden an ein einziges instabiles Atom, in einer von der Außenwelt abgeschlossenen "Black-Box" befindet. Der Tötungsmechanismus für die Katze funktionierte folgendermaßen: Wenn das radioaktive Atom zerfällt, misst der Detektor jene Strahlung und setzt das Gift frei. Zerfällt das Atom jedoch nicht, so passiert nichts weiter und die Katze überlebt.

Interessant wird das Gedankenexperiment aber erst, wenn die Frage gestellt wird, ob die Katze tot oder lebendig ist, ohne dabei die Katze und den Rest des Experiments tatsächlich zu messen. Laut Schrödinger gibt es weder Argumente für noch gegen ein mögliches Überleben der Katze und somit wäre die Katze quantenmechanisch gesehen, in diesem Zustand eine Überlagerung von beidem. Eine Superposition aus den beiden "Katzenzuständen" tot und lebendig.

In seinen letzten Jahren beschäftigte sich der schwächer werdende Schrödinger immer mehr mit seiner Frau Anny und der Philosophie, die ihm immer treu geblieben waren. Nach seinen letzten glücklichen Momenten gemeinsam mit seiner Familie starb Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger friedlich und zufrieden am 4. Januar 1961 in Wien-Alsergrund und wurde danach am Friedhof in Alpbach beerdigt.



2.2 Philosophische Einstellung

Wie bereits kurz erwähnt hat Erwin Schrödinger während seines Lebensabends bis zum Jahre 1960 seine philosophische Weltansicht und eine kurze Autobiographie verfasst, welche später auch veröffentlicht wurden [Schrödinger, 2016]. Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten Aspekte seiner Weltansicht festgehalten.

Erwin Schrödinger war ein belesener Mann. Er hat sich nicht nur in die Schriften von Vedânta und Schopenhauer eingelesen und den Buddhismus für sich erkundet, sondern hatte während seines ganzen Lebens immer großes Interesse an der Philosophie.

Sein Leben war ein einziges großes Staunen über die Welt und ihre Phänomene. Seiner Meinung nach sollten die Menschen generell wieder mehr staunen und "Begeisterung" für die (Wunder der) Natur zeigen. Wie die meisten Philosophen, bemängelte auch er, dass wir Menschen das Staunen komplett verlernt haben.

"Wem sich nicht irgendeinmal das höchst eigentümliche und Seltsame des Zustandes, in den wir da hineingeraten sind, wir wissen nicht wie, ins Bewußtsein gedrängt hat, der steht zur Philosophie in keinem Verhältnis - und hat das im übrigen wohl nicht sehr zu bedauern."

[Schrödinger, 2016, S. 56]

Schrödinger sieht das Staunen selbst als wichtigste Verbindung zur Philosophie. Jeder kann und soll individuell sein Staunen erleben, dies war eine seiner wichtigsten Anliegen.

Auch die Individualität und wie diese philosophisch zu verstehen und erklären ist, war eine wichtige These in seinem Weltbild. Laut Schrödinger gibt es in diesem Bezug vier wichtige Fragen, die nur sehr schwer eindeutig zu beantworten sind. Er bezeichnet jene kurz als "Das Problem: Ich - Welt - Tod - Vielheit". Obwohl er für viele Ansichten offen war und den Sachverhalt dieses Problems sehr frei von Vorurteilen darstellte, so stellte er bereits zu Beginn eine Ansicht als für ihn unvertretbar dar:

"Wenn wir von vornherein verabreden, die Vorstellung einer den Körper als Haus bewohnenden und beim Tode aus ihm ausziehenden, auch außer ihm existenzfähigen Seele als eine gar zu naiv-kindliche Konstruktion ohne weitere Diskussion beiseite zu lassen [...]" [Schrödinger, 2016, S. 59]

Nachdem diese "unsinnige" Ansicht von ihm aus dem Weg "geräumt" wurde, konzentriert er sich auf die folgenden vier wichtigen Fragen:

"1. Existiert ein Ich?"

"2. Existiert die Welt nebst Mir?"

"3. Hört Ich mit dem körperlichen Tod auf?"

"4. Hört Welt mit Meinem körperlichen Tod auf?" [Schrödinger, 2016, S. 59]

Schrödinger gibt in seinem Werk einen Vorgeschmack darauf, wie die verschiedenen Aspekte dieses Problems zu lösen wären. Er argumentiert und behandelt prinzipiell alle Möglichkeiten sachlich und vollständig, nimmt sich aber erneut das Recht, mit seiner persönlichen Meinung manche Ansichten als "falsch" zu deklarieren.

Für ihn liegt das größte Problem der Philosophie ”in der räumlichen und zeitlichen Vielheit anschauender und denkender Individuen” [Schrödinger, 2016, S. 67]. Des Weiteren, behauptete er das Folgende:

”Ich glaube nicht, daß die Lösung des Knotens auf logischem Wege durch folgerichtiges Denken innerhalb unseres Intellekts möglich ist.”
[Schrödinger, 2016, S. 67]

Der Logiker in ihm, gab auf. Schrödinger überzeugte sich oft davon und kam am Ende immer wieder zu der selben Ansicht, dass das Problem der Philosophie, ”das Hauptproblem”, wie er es beschreibt, nicht auf logischem, klar argumentiertem Wege zu lösen sei. Wie jeder andere Mensch ”musste” er aber zumindest für sich selbst eine Lösung finden, mit der er zufrieden war und an die er glauben konnte. Erwin Schrödinger fand seine ”Lösung” an die er glauben konnte in den Schriften Vedântas und weiteren buddhistischen Manuskripten. Auch wenn er es in dem Buch über seine Weltansicht nur teilweise klar an-, beziehungsweise wiedergibt, so war er sehr überzeugt von dem buddhistischen Glauben und konnte mit ihm, seinen ”philosophischen Frieden” finden.

2.3 Einfluss von anderen Wissenschaftern und Freunden

Erwin Schrödinger war ein Einzelkind. Er wuchs in Obhut seiner Eltern und Tanten auf. Eine große Bedeutung spielte in seiner Kindheit seine Tante Emily Bauer, auch Minnie genannt. Sie lehrte ihn die englische Sprache und brachte ihn dazu, Tagebuch zu führen, eine Angewohnheit, die er sein ganzes Leben beibehalten sollte. Am wichtigsten war für ihn trotzdem immer sein Vater Rudolf. Folgendes Zitat bringt die Achtung und den Respekt, den Erwin vor seinem Vater hatte, zur Geltung und zeigt sein Verhältnis zu seinen Eltern:

”Meinem Vater bin ich für weitaus mehr dankbar, als dass er uns ein äußerst angenehmes Leben schenkte und mir eine hervorragende Erziehung sowie eine sorgenfreie universitäre Ausbildung ermöglichte, obwohl er bis fast zu seinem Lebensende mit wenig Begeisterung oder auch Begabung das Wachstumsgeschäft weiterführte, das er geerbt hatte. Er besaß eine außergewöhnlich umfangreiche Bildung; seinem Chemiestudium folgte eine mehrjährige intensive Auseinandersetzung mit der italienischen Malerei, einhergehend mit eigenen Landschaftszeichnungen und Radierungen, schließlich führte ihn der Weg zu den Pyxiden und ans Mikroskop, aus diesen Studien ging eine Reihe von Publikationen über die Pflanzenphylogenetik hervor. [...] Meine Mutter war sehr gütig und von heiterer Natur, aber kränklich und hilflos, nicht sehr lebensstüchtig, auch anspruchslos. Ich denke, neben der aufopfernden Fürsorge, habe ich ihr für meinen Respekt gegenüber Frauen zu danken.” [Moore, 2012]

Wie aus dem Zitat von Schrödinger hervorgeht, war auch sein Vater immer ein leidenschaftlicher Wissenschaftler. Wie Erwin beschreibt, so war sein Wissen in den Bereichen Chemie und Botanik sehr umfassend und er konnte Erwin somit auf viele seiner Fragen wissenschaftlich fundierte Antworten geben. Er publizierte auch einige Werke zur Mikrobiologie und beschäftigte sich mit den Pyxiden (Behälter oder Büchsen aus Holz, bemalt mit verschiedenen Szenen oder Mustern) und der Pflanzenphylogenetik (Wissenschaft der genetischen Abstammung von Pflanzen).

Rudolf Schrödinger war für seinen interessierten Sohn immer Gesprächspartner und Vorbild, somit lernte Erwin nicht nur viel von seinem Vater, sondern übernahm auch manche seiner Weltansichten. Seine äußerst geringe Begeisterung für Musik und Musikinstrumente ist wahrscheinlich in der Tatsache begründet, dass Rudolf das Musiktalent seiner Frau Georgine nie zu schätzen wusste und ihre Begabung so verkümmerte. Neben der Musik stand Erwins Vater auch der Kirche sehr kritisch gegenüber. Sein Sohn tat ihm das gleich, wenn auch in einer eher skeptischen als kritischen Art.

Ein weiterer wichtiger Mensch im Leben des österreichischen Physikers war Fritz Hasenöhr. Während Schrödingers ersten Jahren seines Physik-Studiums hatte Ludwig Boltzmann den Lehrstuhl des Physik-Institutes an der Universität Wien inne. Sein Einfluss war zwar auch nicht unwesentlich, dennoch übte sein Nachfolger, Fritz Hasenöhr, einen viel größeren Einfluss auf den jungen Studenten Schrödinger aus. Von seiner ersten Vorlesung an zog der österreichische Lektor den jungen Schrödinger in seinen Bann und festigte die Entscheidung Schrödingers, sich der mathematischen Physik zuzuwenden. Er war ein umgänglicher Mensch, genauso wie ein ausgezeichneter Vortragender. Den Beschreibungen seiner Studenten zufolge, war er immer sehr um ihr Wohl bemüht und veranstaltete auch oft private "Unterrichtsstunden" mit den Studenten in seinem Eigenheim. Fritz Hasenöhr sowie Erwins Vater Rudolf Schrödinger sollten die zwei wichtigsten und prägendsten Persönlichkeiten im Leben des Erwin Schrödingers werden.

Natürlich hatte Erwin Schrödinger auch immer Menschen seines Alters an seiner Seite, die ihm wichtig waren. Zu Studienzeiten war beispielsweise der Botanikstudent Franz Frimmel, genannt Fränzel, sein bester und wie von ihm selbst empfunden, sein einziger echter Freund. Obwohl sich die beiden nach ihrer Studienzeit aus den Augen verloren, so waren die nächtlichen philosophischen Diskussionen sehr wichtig für die Entwicklung von Erwins Weltbild. Dank Fränzel kam Schrödinger auch erstmals in den Kontakt mit dem Buch "Die Mneme [=Erinnerung, Gedächtnis] als erhaltendes Prinzip im Wechsel des organischen Geschehens" [Semon, 1907], welches später einen großen Einfluss auf seine philosophischen Ideen und Anschauungen hatte.

Als weitere wichtige Vorbilder wären noch anzuführen: Ernst Mach, dessen philosophische Ansichten etwas ganz Neues für den Studenten Schrödinger waren. Albert Einstein, der viel Zeit in engem Briefkontakt mit Erwin Schrödinger verbracht; Schopenhauer, dessen Bücher Erwin im Anschluss an den ersten Weltkrieg buchstäblich verschlang; Lafcadio Hearn, ein weiterer Philosoph unter dessen "starken Einfluss" Schrödinger laut eigenen Worten stand.

All diese mehr oder weniger bekannten Persönlichkeiten begleiteten Erwin Schrödinger auf seinem Lebensweg und formten ihn selbst und seine philosophische und wissenschaftliche Denkweise. Sein Werk "Mein Leben, meine Weltansicht" [Schrödinger, 2016], ist ein Buch, das als eine Art philosophische Konsequenz seines Lebens gedacht war und eine Zusammenfassung seiner Erfahrungen, Lebenseindrücke und Vorstellungen darstellte. Schrödinger selbst sah sich zu Lebzeiten nie als Mann der Wissenschaften und sein Denken war auch nie auf diesen Bereich beschränkt. Er war ein sehr weltoffener Mensch, der die Welt in allen ihren Facetten erfassen wollte und keinen Halt vor gesellschaftlich festgesetzten Grenzen machte.

Kapitel 3

Die Schrödinger-Gleichung

Dieses Kapitel behandelt die Plausibilisierung der eindimensionalen zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung sowie die physikalischen Aspekte dieses quantenmechanischen Axioms.

3.1 Plausibilisierung

Die Schrödinger-Gleichung ist ähnlich dem zweiten Newton'schen Axiom nicht direkt herzuleiten. Somit kann man die Gleichung nur durch "kluges Raten" finden und sie später durch verschiedene Experimente überprüfen. Kenntnisse über folgende Grundgleichungen sind erforderlich, um der mathematischen Vorgehensweise folgen zu können:

Energieerhaltungssatz im Bezug auf ein freies Teilchen (E =konstant)

$$E_{kin} + E_{pot} = E \quad (3.1)$$

Nicht-relativistische kinetische Energie in Abhängigkeit von Masse und Geschwindigkeit

$$E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad (3.2)$$

Impulssatz für ein Teilchen mit der Masse m und der Geschwindigkeit v

$$p = m \cdot v \quad (3.3)$$

Allgemeine Auslenkung einer "klassischen" Welle zu einem gewissen Zeitpunkt $t=0$

$$\psi(x) = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x) \quad (3.4)$$

Dabei sind A und B allgemeine Konstanten und der Faktor k ist gegeben durch:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.5)$$

De-Broglie-Wellenlänge mit dem Planck'schen Wirkungsquantum h lautet

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3.6)$$

Die De-Broglie-Wellenlänge ist eines der wichtigsten quantenmechanischen Prinzipien im Bezug auf den Welle-Teilchen Dualismus. Die Gleichung basiert auf der Annahme, dass Licht und Materie sowohl Teilchen- als auch Wellencharakter besitzen.

Mit dem Wissen, dass die Wellenlänge durch den Impuls definiert ist, können wir die De-Broglie-Wellenlänge (siehe Gleichung 3.6) in die Gleichung 3.5 einsetzen.

$$k = \frac{2\pi \cdot p}{h} = \frac{p}{\hbar} \quad (3.7)$$

Kehren wir nun zurück zum ersten wichtigen Punkt, den die Schrödinger-Gleichung erfüllen muss, die Energieerhaltung. Wir setzen nun in die allgemeine Energieerhaltung (Gleichung 3.1) die kinetische Energie (Gleichung 3.2) ein.

$$\frac{m \cdot v^2}{2} + E_{pot} = E \quad (3.8)$$

Einsetzen des Impulssatzes $p = m \cdot v$ in die Gleichung der kinetischen Energie:

$$v = \frac{p}{m} \quad (3.9)$$

$$v^2 = \frac{p^2}{m^2} \quad (3.10)$$

$$E_{kin} = \frac{m \cdot p^2}{m^2 \cdot 2} \quad (3.11)$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \quad (3.12)$$

Wegen $p = \hbar \cdot k$ (siehe Gleichung 3.7), folgt:

$$\frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m} + E_{pot} = E \quad (3.13)$$

Nachdem alle wesentlichen Vorbereitungen getroffen wurden, kann man sich den Grundforderungen beziehungsweise Grundannahmen zuwenden. Folgendes Zitat gibt die Annahmen für ein einfaches Beispiel wieder, mit dessen Hilfe auf die Form der Schrödinger-Gleichung geschlossen werden kann:

”Wir betrachten ein freies Teilchen, auf das keine Kraft wirkt, so dass seine **potentielle Energie** E_{pot} konstant ist. Wir nehmen an, dass sich das Teilchen **entlang der x-Achse** bewegt. Weil keine Kraft auf das Teilchen wirkt, bleibt sein Impuls konstant, und seine Wellenlänge ($\lambda = h/p$) ist fest. Wenn wir eine Welle eines freien Teilchens, wie die des Elektrons, beschreiben, erwarten wir, dass seine Wellenfunktion eine Differentialgleichung erfüllt, die der klassischen Wellengleichung sehr ähnlich (jedoch nicht mit ihr identisch) ist. [...] Wir sind lediglich an der Ortsabhängigkeit interessiert, so dass wir die Welle zu einem **bestimmten Zeitpunkt**, etwa $t = 0s$, betrachten.” [Giancoli, 2011, S. 594-595]

Dank **dieser Annahmen** kennen wir nun Forderungen, denen die gesuchte (Schrödinger-) Gleichung entsprechen muss. Weiters konnte mithilfe des bestimmten Beobachtungszeitpunktes ($t = 0s$) die Gleichung auf die Ortsabhängigkeit beschränkt werden.

Jetzt können die umgeformten Gleichungen unter Berücksichtigung folgender Bedingungen kombiniert werden.

”Wir suchen also nach einer Differentialgleichung, die die Energieerhaltung [...] erfüllt, wenn $\psi(x)$ ihre Lösung ist. Bilden wir nun die zweite Ableitung von $\psi(x)$, [...], erhalten wir $\psi(x)$ multipliziert mit $-k^2$:” [Giancoli, 2011, S. 595]

Ergebnis der Ableitungen:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = k \cdot (A \cdot \cos(kx) - B \cdot \sin(kx)) \quad (3.14)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2 \cdot [(A \cdot \sin(kx) - B \cdot \cos(kx))] = -k^2 \cdot \psi(x) \quad (3.15)$$

Nun müssen wir nur noch folgendes tun:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2 \cdot \psi(x) \quad | \cdot (-\hbar^2/2m) \quad (3.16)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m} \psi(x) \quad (3.17)$$

Wir multiplizieren nun die Gleichung 3.13 mit $\psi(x)$

$$\frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m} + E_{pot} = E \quad | \cdot \psi(x) \quad (3.18)$$

$$\frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m} \cdot \psi(x) + E_{pot} \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x) \quad (3.19)$$

Abschließend setzen wir für $\frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2m} \cdot \psi(x)$, den Ausdruck aus 3.17 ein.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + E_{pot}(x)\psi(x) = E\psi(x)} \quad (3.20)$$

”Dies ist tatsächlich die eindimensionale zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung, in der wir allgemein $E_{pot} = E_{pot}(x)$ geschrieben haben. Sie bildet den Ausgangspunkt für die Lösung von Problemen in der nichtrelativistischen Quantenmechanik.” [Giancoli, 2011, S. 595]

3.2 Mathematische und physikalische Aspekte

Es muss darauf hingewiesen werden, dass die Schrödinger-Gleichung im Kapitel 3.1 keineswegs hergeleitet wurde. Stattdessen war dies nur ein Versuch sie mit möglichst einfachen mathematischen Mitteln plausibel darzustellen. Um die Gleichung nun auch physikalisch zu prüfen gibt es einige Forderungen, welche die Schrödinger-Gleichung erfüllen muss.

Folgender Term muss aber zuerst noch erklärt werden:

$|\psi|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen an einem bestimmten Ort zu finden und wird auch als **Wahrscheinlichkeitsfunktion** bezeichnet.

Um die Berechnung der Wahrscheinlichkeit über die ganze Funktion zu ermöglichen, muss die Funktion stetig sein, das heißt es dürfen keine Sprünge auftreten. Außerdem muss das Integral über die Wahrscheinlichkeitsfunktion immer **1** ergeben. Begründet dadurch, dass bei einer tatsächlichen Messung, das Teilchen sich **genau** an einer Stelle befindet. Mathematisch dargestellt durch:

$$\int |\psi|^2 dV = 1 \quad (3.21)$$

Bei nur einer Dimension kann man dV zu dx vereinfachen und die Gleichung auf die Form $\int |\psi|^2 dx = 1$ bringen. Man nennt diese Bedingung die **Normierungsbedingung** und sie erstreckt sich über den gesamten Raum in dem sich das Teilchen aufhalten kann. Sehr oft ist dies der gesamte Raum, also von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$.

Betrachten wir nun erneut unser Ausgangsbeispiel: Ein freies Teilchen mit $E_{pot} = 0$. Der Impuls p und die Energie E des Teilchens sind beide exakt bestimmt. Die Wellenfunktion basiert auf einer Superposition aller möglichen Zustände des Teilchens. Setzt man dies nun direkt in die Schrödinger-Gleichung ein, gelangt man zu einer sehr bekannten Wellenfunktion, der Sinus-Funktion ($\sin(x)$). Um den physikalischen Kontext herzustellen, wird auf das Kapitel 1.2 verwiesen. Denn dieser gänzlich unbestimmte Ort des Teilchens, dargestellt durch die "endlose" Sinus-Funktion, resultiert aus dem exakt bestimmten Impuls. Dazu muss die bekannte Impulsunschärfe ($\Delta p = 0$) in die Heisenberg'sche Unschärferelation eingesetzt werden: $\Delta x \gtrsim \hbar/\Delta p \Rightarrow \Delta x = \infty$ Als Ergebnis resultiert eine unendlich große Ortsunschärfe. Anders gesagt: Der Ort des Teilchens ist **komplett** unbestimmt.

Häufiger ist im "Teilchen-Alltag" jedoch eine Mischung zwischen einem bestimmten Ort und einem bestimmten Impuls, beide sind teilweise "unscharf". Wenn man ein, im Aufenthaltsort begrenztes "eingesperrtes" Teilchen als Beispiel nimmt, so kann man dieses durch ein Wellenpaket darstellen. Ein Wellenpaket ist die Summe vieler ebener Wellen, die sich nur minimal in ihrer Wellenlänge unterscheiden. In diesem Fall kann man wiederum mithilfe der Heisenberg'schen Unschärfe auf eine sehr wichtige Folgerung schließen. Je kleiner der Ort, an dem sich die Teilchen aufhalten müssen, desto bestimmter ist der Ort, was wiederum den Impuls sehr "unscharf" werden lässt.

"Da nun schon einmal eine Messgröße - man sagt auch Observable - in der Quantenmechanik bei Vorliegen einer allgemeinen Wellenfunktion nur statistisch variierende Einzelwerte bei den entsprechenden Messungen ergibt[...], nimmt man am besten Abschied von der Beschreibung des Impulses oder der Energie durch feste wohldefinierte Werte wie in der klassischen Mechanik. Dies entspricht genau dem Geiste der Unschärferelation."
 [Lüth, 2014, S. 46]

3.3 Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf

Eine der wichtigsten Anwendungen und gleichzeitig eines der einfachsten Beispiele ist die Lösung der Schrödinger-Gleichung für eingesperrte Elektronen in einem unendlich tiefen "Potentialtopf". Auch wenn diese Anwendung sehr realitätsfern scheinen mag, kann man die Lösung sehr gut als Näherung verwenden, um verschiedene Phänomene zu erklären.

Folgende Annahmen zum Potentialintervall sind vorab zu treffen:

$$E_{pot}(x) = 0 \quad \text{wenn} \quad 0 < x < L$$

$$E_{pot}(x) = \infty \quad \text{wenn} \quad x \leq 0 \quad \text{und} \quad x \geq L$$

Wir benötigen nun eine Lösung der Schrödinger-Gleichung bei $E_{pot} = 0$. Das Teilchen im Potentialtopf kann näherungsweise als frei angesehen werden, somit benötigen wir die Lösung der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen:

$$\psi(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) \tag{3.22}$$

mit (umgeformt aus Gleichung 3.16)

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{3.23}$$

”Außerhalb des Potentialtopfes gilt $E_{pot}(x) = \infty$, so dass $\psi(x)$ null sein muss. (Andernfalls wäre das Produkt $E_{pot} \cdot \psi$ in der Schrödinger-Gleichung nicht endlich [...].) Wir haben die Stetigkeit der Wellenfunktion gefordert. Wenn außerhalb des Potentialtopfes $\psi = 0$ gelten soll, dann muss es an den Stellen $x = 0$ und $x = L$ gleich null sein[...]” [Giancoli, 2011, S. 598]

Wir können nun diese Folgerungen mathematisch darstellen:

$$\psi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(L) = 0$$

Man nennt solche Bedingungen für die Lösung eines Problems **Randbedingungen**. Wenn $\psi(x)$ an der Stelle $x = 0$, null entsprechen soll, dann muss die Konstante B in der Wellenfunktion (Gleichung 3.22) gleich 0 sein, weil $\cos(0) = 1$. Sonst würde der Ausdruck insgesamt nicht 0 entsprechen. Folglich können wir an der Stelle $x = 0$ auf folgende Wellenfunktion schließen:

$$\psi(x) = A \cdot \sin(kx) \tag{3.24}$$

An der Stelle $x = L$ gilt:

$$\psi(L) = 0 \tag{3.25}$$

$$A \cdot \sin(kL) = 0 \tag{3.26}$$

$$\sin(n \cdot \pi) = 0 \tag{3.27}$$

Man kann allgemein sagen:

$$k \cdot L = n \cdot \pi \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.28}$$

Daraus kann man schließen, dass die Wellenfunktion innerhalb des Potentialtopfes nur gewisse Formen (Niveaus) annehmen kann.

$$\text{Wir formen um auf:} \quad k = \frac{n\pi}{L} \tag{3.29}$$

Wir setzen in die Gleichung 3.23 ein und erhalten:

$$\frac{n\pi}{L} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad |^2 \quad (3.30)$$

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad | \cdot \hbar^2 \quad (3.31)$$

$$\frac{\hbar^2 \cdot n^2}{4 \cdot L^2} = 2mE \quad | : (2 \cdot m) \quad (3.32)$$

$$\boxed{E = n^2 \cdot \frac{\hbar^2}{8mL^2}} \quad (3.33)$$

Wenn wir nun $n=1$ einsetzen, erhalten wir den Grundzustand E_1

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{8mL^2} \quad (3.34)$$

$$\Rightarrow E_n = n^2 \cdot E_1 \quad (3.35)$$

Den Parameter A können wir uns aus folgender Annahme bestimmen:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx = \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (3.36)$$

Das Resultat:

$$1 = A^2 \cdot \frac{L}{2} \quad A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (3.37)$$

Allgemein formuliert lautet die Wellenfunktion eines eingesperrten Elektrons in Abhängigkeit von der Breite des Potentialtopfes und der Quantenzahl des Elektrons:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.38)$$

Die möglichen Energiezustände innerhalb eines Potentialtopfes in der Abhängigkeit von n werden im folgenden Diagramm veranschaulicht:

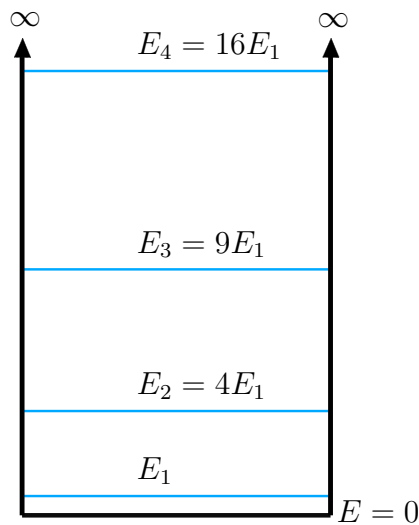


Abbildung 3.1: nach Abb. 26.8 [Giancoli, 2011, S. 599]

Man sieht: Die Energiezustände eines auf diese Weise eingesperrten Teilchens sind quantisiert, das heißt, dass jenes Teilchen nicht beliebige Energiezustände besitzen kann. Man spricht auch von der Zahl n als **Quantenzahl** und der kleinstmögliche Energiezustand des gefangenen Teilchens wird als **Nullpunktenergie** bezeichnet. Ein wichtiger Schluss, den man aus diesem Beispiel ziehen kann, ist, dass ein eingesperrtes Teilchen **immer** mindestens die Nullpunktenergie besitzen muss. Somit kann das Teilchen nie als ruhend angesehen werden.

Man kann dieses Modell als außergewöhnlich gute Näherung für das Verhalten von Elektronen in einem Metallgitter verwenden und somit Phänomene, wie die des fotoelektrischen Effekts (siehe Kapitel 1.3.1) besser verstehen. Als mögliche weitere Beispiele für die Verwendung der Schrödinger-Gleichung, sind hier auch das Berechnen der möglichen Elektronenzustände im Wasserstoff-Atom oder das Tunneln von Teilchen durch eine Barriere anzuführen.

Kapitel 4

Auswirkungen auf die Wissenschaft

Wie alle wichtigen Erkenntnisse in der Wissenschaft, so erregte auch die Entdeckung der Schrödinger-Gleichung großes Aufsehen in den Naturwissenschaften. Welche Entwicklungen durch diese Gleichung ausgelöst wurden und wie die Quantenmechanik allgemein unsere Welt bis heute prägt, wird in diesem Kapitel diskutiert.

4.1 Physik

”Die neue, als Quantenmechanik bezeichnete Theorie vereinheitlicht den Welle-Teilchen-Dualismus zu einer einzigen konsistenten Theorie. Als Theorie war die Quantenmechanik unglaublich erfolgreich. Mit ihrer Hilfe konnte man die von komplexen Atomen emittierten Spektren und selbst deren Feinstruktur hinreichend behandeln. Sie erklärt die relative Helligkeit der Spektrallinien und die Art und Weise, wie Atome Moleküle bilden. Sie ist zudem eine allgemeine Theorie, die alle Quantenphänomene, angefangen mit der Strahlung des schwarzen Körpers bis hin zum Verhalten von Atomen und Molekülen umfasst. Sie hat ein breites Spektrum natürlicher Phänomene erklärt, und ihre Vorhersagen machten viele neue praktische Instrumente möglich. Sie war tatsächlich so erfolgreich, dass sie heute von nahezu allen Physikern als die fundamentale Theorie akzeptiert wird, die den physikalischen Prozessen zugrunde liegt.” [Giancoli, 2011, S. 584-585]

Effekte wie das Tunneln von Teilchen durch Barrieren, der Aufbau von Atomen, die Emissionsspektren von Molekülen und unzählige weitere Phänomene konnten mit der neuen Theorie hinreichend korrekt erklärt werden. Ohne die Errungenschaften der Quantenmechanik und der Schrödinger-Gleichung wäre die Natur im mikroskopischen Bereich noch immer ein einziges großes Rätsel.

Bis die theoretischen Ansätze der Quantenmechanik experimentell bewiesen werden konnten, vergingen noch einige Jahre, wenn nicht Jahrzehnte. Ganz zu schweigen von der Zeit, die es brauchte, bis die Öffentlichkeit von diesen Errungenschaften erfahren und profitieren konnte. Traurigerweise wissen auch heute noch viele Menschen, darunter auch viele Österreicher, die Erkenntnisse ihres Landmanns Erwin Schrödinger nicht zu schätzen.

Zumindest innerhalb der Gemeinschaft der Physiker bekam Schrödinger die ihm gebührende Anerkennung. Immerhin löste er gemeinsam mit Werner Heisenberg die damals längst überalterte Atomtheorie von Niels Bohr ab und begründete so die Quantenmechanik. Mit jener gelang es, das Problem des Welle-Teilchen-Dualismus zu überwinden und zu der Ansicht zu gelangen, dass sowohl Wellen als auch Teilchen nur verschiedene Ansichten auf ein und dasselbe Objekt sind. Um nur einen kleinen Einblick in die umfassenden Erkenntnisse der Quantenmechanik zu erhaschen, bräuchte man nur das erste Kapitel dieser Arbeit zu lesen. Alle dort angeführten Gesetzmäßigkeiten und Effekte wären ohne die Arbeit der "Quantenpioniere" noch immer ein Rätsel. Ohne die Schrödinger-Gleichung und die revolutionierende Ansicht von Licht als Teilchen würde man bei Einflüssen von Licht im mikroskopischen Bereich wortwörtlich im Dunkeln tappen.

Als wäre das nicht genug, revolutionierte der Österreicher unser Verständnis des Aufbaus von Atomen grundlegend. Mit der Schrödinger-Gleichung ist es möglich die verschiedenen Quantenzustände des Wasserstoffatoms exakt zu berechnen und die Struktur von Molekülen und Atombindungen zu verstehen. Dieses Wissen ist das Fundament für die moderne Chemie und ohne jenes wären Erfindungen, wie die des Elektronenmikroskops nur Hirngespinnste.

Schrödinger und andere quantenmechanische Pioniere wie Heisenberg oder Planck brachten mit ihrer neuen Theorie die bis dahin geltenden Prinzipien und Gesetze im Bereich der Quanten und Teilchen auf "Glatteis". Der Determinismus war vor 1900 eine weit verbreitete Meinung unter Wissenschaftlern. Sie alle glaubten daran, dass man nur genug Parameter kennen musste, um alles im Universum vorherzusagen. Die Quantenmechanik machte ihnen einen Strich durch die Rechnung. Das Verschwinden von festgelegten, (immer) messbaren Größen und der Einfluss des puren Zufalls im mikroskopisch kleinen Bereich zerstörte die Vorstellung einer deterministisch berechenbaren Welt. Auf diesen Trümmern wurde die Quantentheorie, eine neue, viel umfassendere Wissenschaft der Physik auf gebaut, die das Verständnis unserer Welt revolutionierte.

4.2 Eine Welt ohne Schrödingers Katze

Folgender Abschnitt handelt über ein hypothetisches Gedankenexperiment, indem eine parallele Zeitachse geschaffen wird. Jene unterscheidet sich von unserer nur durch die Existenz der Schrödinger-Gleichung beziehungsweise der Quantenmechanik im Allgemeinen. Weiters wird die Annahme getätigt, dass die Theorie der Quantenmechanik in diesem Gedankenexperiment in keiner Weise existent ist.

Es wäre absurd zu behaupten, dass Teilchen sich total planlos bewegen würden. Erwin Schrödinger hätte ihre Bewegung sonst nie durch seine Gleichung beschreiben können. Den ersten Schluss, den wir somit aus diesem Gedankenexperiment ziehen können, ist dass die Welt auch ohne dieser Entdeckung ihren gewohnten Gang geht und die Teilchen unabhängig von dieser Entdeckung sich "natürlich" bewegen. Dieser Schluss ist begründet dadurch, dass die Welt sonst nie bis zu dem Zeitpunkt der Entdeckung der Schrödinger-Gleichung existieren hätte können, wenn diese Gleichung selbst essentiell für das Bestehen der Welt gewesen wäre.

Auch die Menschheit wäre im Jahre 2019 existent, egal ob mit oder ohne Schrödinger-Gleichung. Unglücklicherweise gibt es doch ein paar signifikante Unterschiede dieser beiden unterschiedlichen "Wirklichkeiten". Der allgemeine Wissensstand wäre, bis auf ein paar Ausnahmen, ziemlich genau auf dem Niveau vor der Quantentheorie geblieben. Einsteins Theorie über die Bewegung von Körpern würde zwar die Kinetik revolutioniert haben.

Das "Global Positioning System" (=GPS) benötigt zwei wichtige theoretische Sparten der Physik um korrekt und vor allem genau funktionieren zu können. Auf der einen Seite ist die Relativitätstheorie von Albert Einstein zur Korrektur von relativistischen Abweichungen zur klassischen Physik beim Berechnen der Distanzen wichtig. Auf der anderen Seite wiederum spielt die Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Das GPS benötigt für eine auf ein paar Zentimeter genaue Bestimmung der Position eines Senders die Entfernung dieses Senders zu mindestens vier Satelliten im Erdorbit. Diese Distanzen werden mithilfe der Übermittlung von Radiowellen aus Atomuhren errechnet, die sich an Bord der Satelliten befinden. Jene funktionieren mithilfe quantenmechanischer Prinzipien, vor allem mit der Teilcheneigenschaft von Licht und der damit verbundenen Quantisierung. Ohne das Wissen über diese Phänomene wäre das "Global Positioning System" unmöglich.

Natürlich könnte man behaupten, dass rein mechanische Maschinen funktionstüchtig wären. Dem ist auch so. Somit hätten wir zumindest eine Dampfmaschine und andere thermodynamisch funktionierende Motoren statt Quantencomputer zur Erforschung unserer Welt.

Erstaunlicherweise würde die Mehrheit der Menschen beim Lesen dieses Gedankenexperiments entweder innerlich abschalten und den Sinn davon nicht verstehen, oder sogar die Quantenmechanik als unnötiges Hirngespinnst darstellen und lieber eine Welt voller (eindeutig) lebender Katzen bevorzugen. Und genau dieser Punkt ist das Hauptaugenmerk dieses Kapitels. Die Evolution der Menschheit kann man einfach abändern, denn es gibt unzählige wissenschaftliche Errungenschaften ohne die wir weit von unserer heutigen Entwicklung entfernt wären. Das mit Abstand größte Problem ist aber die Menschheit selbst, die es verweigert, einzusehen, dass der Fortbestand ihrer Zivilisation so gefährdet wie nie zuvor ist. Jeder fehlende Baustein könnte das gesamte Gebilde zusammenfallen lassen.

Die Schlussfolgerung aus diesem Gedankenexperiment ist somit folgende: Der Großteil der Menschheit in der Geschichte hat es nie interessiert, wem sie ihre Entwicklung, ihren Lebensstandard, ihr Überleben zu verdanken haben. Nämlich den Männern und Frauen die sich die Mühe machten die Welt zu erforschen. Nämlich jenen Menschen, die ihr Leben der Wissenschaft widmeten, um mit ihren Erkenntnissen und Erfindungen die Welt, besser zu machen.

”Like so many works that have had a great impact on human thinking, it makes points that, once they are grasped, have a ring of almost self-evident truth; yet they are still blindly ignored by a disconcertingly large proportion of people who should know better.” [Schrödinger, 2012]

Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Die Schrödinger-Gleichung, das Thema meiner Arbeit, sowie ihre Auswirkungen und Herleitung sind sowohl komplex als auch umfangreich und essentiell für das theoretische Modell der Quantenphysik. Die Gleichung ist in all ihren Formen ein Axiom der "neuen" Sparte der Physik. Basierend auf den grundlegenden Prinzipien der Quantenmechanik, wie Welle-Teilchen-Dualismus, Heisenberg'sche Unschärferelation oder auch der De-Broglie-Wellenlänge, ist diese Errungenschaft des Österreichers Erwin Rudolf Schrödinger nur schwer allgemein verständlich darzustellen. Sein Leben war sehr bewegt und geprägt von den damaligen politischen Entwicklungen. Trotzdem widmete er der Physik seine ganze Aufmerksamkeit und hinterließ uns eine fundamentale Erkenntnis, die unser Weltverständnis bis heute prägt.

Wie ich im Rahmen dieser Arbeit erfahren durfte, ist es eine große Herausforderung alle wichtigen und interessanten Fakten, Tatsachen, Gleichungen und Erklärungen in einem für eine vorwissenschaftliche Arbeit sinnvollem Umfang darzulegen. Die Auseinandersetzung mit diesem Thema war für mich trotzdem sehr spannend und bereichernd. Weiters war es eine große Unterstützung, mit meinem Betreuer, Herr Dr. DI Wilhelm Moser als zweite Meinung und Experte zusammenzuarbeiten.

Inhaltlich hätte man die Schrödinger-Gleichung noch viel detaillierter behandeln können, wenn man beispielsweise auf die zeitabhängige Wellenfunktion näher eingegangen wäre. Trotzdem interferiert dieses Anliegen wiederum mit dem anfänglichen Leitgedanken, die wichtigsten Prinzipien prägnant und vor allem allgemein verständlich zu erklären.

Literaturverzeichnis

- [Einstein, 1972] Einstein, Bohr, H. (1972). *Briefwechsel 1916-1955*. Rowohlt Taschenbuchverlag, Reinbek bei Hamburg.
- [Giancoli, 2011] Giancoli, D. C. (2011). *Giancoli Physik, Gymnasiale Oberstufe*. Pearson Education Deutschland GmbH, Hallbergmoos.
- [Kuchling, 2014] Kuchling, H. (2014). *Taschenbuch der Physik*. Carl Hanser Verlag, München.
- [Lüth, 2014] Lüth, H. (2014). *Quantenphysik in der Nanowelt, Schrödingers Katze bei den Zwergen*. Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg.
- [Moore, 2012] Moore, W. J. (2012). *Erwin Schrödinger, Eine Biographie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- [Schrödinger, 2012] Schrödinger, E. (2012). *What is Life?* Cambridge University Press, Deutschland.
- [Schrödinger, 2016] Schrödinger, E. (2016). *Mein Leben, Meine Weltansicht*, volume 6. dtv Verlagsgesellschaft, München.
- [Semon, 1907] Semon, R. (1907). *Die Mneme als erhaltendes Prinzip im Wechsel des organischen Geschehens*. Vdm Verlag Dr. Müller, Deutschland.

Abbildungsverzeichnis

1.1	nach Abb. 2.1e [Lüth, 2014, S. 12]	8
1.2	nach Abb. 2.8b [Lüth, 2014, S. 23]	9
<hr/>		
3.1	nach Abb. 26.8 [Giancoli, 2011, S. 599]	28